Уравнения движения жидкости Навье - Cтокса и Эйлера.

**Кратко о гидродинамике: уравнения движения**

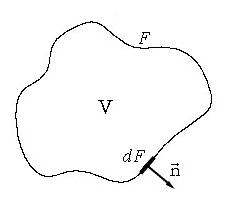
* [Научно-популярное](https://habr.com/ru/hub/popular_science/)

Написав предыдущий [пост](http://habrahabr.ru/post/168667/), исторический и отчасти рекламный (хотя потенциальные абитуриенты такое вряд ли читают), можно перейти и к разговору «по существу». К сожалению, высокой степени популярности описания добиться вряд ли получится, но всё же постараюсь не устраивать курс сухих лекций. *Хотя, от сухости избавиться не удалось, да и пост писался в результате ровно месяц.*  
  
В нынешней публикации описаны основные уравнения движения идеальной и вязкой жидкости. По возможности кратко рассмотрен их вывод и физический смысл, а также описаны несколько простейших примеров их точных решений. Увы, этими несколькими примерами доступные аналитически решения уравнений Навье-Стокса в значительной мере исчерпываются. Напомню, что Институт Клэя отнёс доказательство существования и гладкости решений к проблемам тысячелетия. *Гении уровня Перельмана и выше — задача вас ждёт.*

**Понятие сплошной среды**

В, если можно так выразиться, «традиционной» гидродинамике, сложившейся исторически, фундаментом является модель сплошной среды. Она отвлекается от молекулярной структуры вещества, и описывает среду несколькими непрерывными полевыми величинами: плотностью, скоростью (определяемой через суммарный импульс молекул в заданном элементе объёма) и давлением. Модель сплошной среды предполагает, что в любом бесконечно малом объёме содержится ещё достаточно много частиц (как принято говорить, термодинамически много — числа, близкие по порядку величины к числу Авогадро — 1023 шт.). Таким образом, модель ограничена снизу дискретностью молекулярной структуры жидкости, что в задачах типичных пространственных масштабов совершенно несущественно.  
  
Однако, такой подход позволяет описать не только воду в пробирке или водоёме, и оказывается куда более универсальным. Поскольку наша Вселенная на больших масштабах практически однородна, то, как ни странно, она начиная с некоторого масштаба превосходно описывается как сплошная среда, с учётом, конечно же, самогравитации.  
  
Другими, более приземлёнными применениями сплошной среды являются описание свойств упругих тел, динамики плазмы, сыпучих тел. Также можно описывать [топлу](http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/mcrs/presentations/rudi3.pdf) [людей](http://www.computingscience.nl/docs/vakken/mcrs/papers/15.pdf) как сжимаемую жидкость.  
  
Параллельно с приближением сплошной среды, в последние годы набирает обороты кинетическая модель, основанная на дискретизации среды на небольшие частицы, взаимодействующие между собой (в простейшем случае — как твердые шарики, отталкивающиеся при столкновении). Такой подход возник в первую очередь благодаря развитию вычислительной техники, однако существенно новых результатов в чистую гидродинамику не превнёс, хотя оказался крайне полезен для задач физики плазмы, которая на микроуровне не является однородной, а содержит электроны и положительно заряженные ионы. Ну и опять же для [моделирования](http://www.virgo.dur.ac.uk/) [Вселенной](http://www.deus-consortium.org/a-propos/dark-energy-universe-simulation-full-universe-run/).

**Уравнение неразрывности. Закон сохранения массы**

  
  
Самый элементарный закон. Пусть у нас есть какой-то совершенно произвольный, но макроскопический объём жидкости *V*, ограниченный поверхностью *F* (см. рис.). Масса жидкости внутри него определяется интегралом:  
  
https://habrastorage.org/storage2/bb9/007/73a/bb900773af11643ad8156370e4c48dae.png  
  
И пусть с жидкостью внутри него не происходит ничего, кроме движения. То есть, там нет химических реакций и фазовых переходов, нет трубок с насосами или чёрных дыр. Ну и всё происходит с маленькими скоростями и для малых масс вещества, потому никакой теории относительности, искривления пространства, самогравитации жидкости (она становится существенна на звёздных масштабах). И пусть сам объём и границы еего неподвижны. Тогда единственное, что может изменить массу жидкости в нашем объёме — это её перетекание через границу объёма (для определённости — пусть масса в объёме убывает):  
  
https://habrastorage.org/storage2/fc1/62d/98e/fc162d98e28168a7a8445c03bc96626c.png  
  
где вектор *j* — поток вещества через границу. Точкой, напомним, обозначается [скалярное произведение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Поскольку границы объёма, как было сказано, неподвижны, то производную по времени можно внести под интеграл. А правую часть можно преобразовать к такому же, как слева, интегралу по объёму по [теореме Гаусса-Остроградского](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0%E2%80%94%D0%9E%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE).  
  
В итоге, в обеих частях равенства получается интеграл по одному и тому же совершенно произвольному объёму, что позволяет приравнять подинтегральные выражения и перейти к дифференциальной форме уравнения:  
  
https://habrastorage.org/storage2/099/461/757/0994617572bdfc0e00b439da36dd25ae.png  
  
Здесь (и далее) использован векторный [оператор Гамильтона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%BD%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D0%B0). Образно говоря, это условный вектор, компоненты которого — операторы дифференцирования по соответствующим координатам. С его помощью можно очень кратко обозначать разного рода операции над скалярами, векторами, тензорами высших рангов и прочей математической нечистью, основные среди которых — [градиент](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82), [дивергенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) и [ротор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)). Не буду останавливаться на них детально, поскольку это отвлекает от основной темы.  
  
Наконец, поток вещества равен массе, переносимой через единичную площадку за единицу времени:  
  
https://habrastorage.org/storage2/267/888/324/2678883248c6b96f75249cb7a9b87844.png  
  
Окончательно, закон сохранения массы (называемый также уравнением неразрывности) для сплошной среды таков:  
  
https://habrastorage.org/storage2/785/31d/5b7/78531d5b7369391e2bbbafffe3c50ca9.png  
  
Это выражение наиболее общее, для среды, обладающей переменной плотностью. В реальности, эксперимент свидетельствует о крайне слабой сжимаемости жидкости и практически постоянном значении плотности, что с высокой точностью позволяет применять закон сохранения массы в виде условия несжимаемости:  
  
https://habrastorage.org/storage2/820/10e/7d8/82010e7d85574627ca695a499ba0a61f.png  
  
которое с не менее хорошей точностью работает и для газов, пока скорость течения мала по сравнению со звуковой.

**Уравнение Эйлера. Закон сохранения импульса**

Весь относительно громоздкий процесс ~~колдовства~~ преобразования интегралов, использованный выше, даёт нам не только уравнение неразрывности. Точно такие же по сути преобразования позволяют выразить законы сохранения импульса и энергии, и получить в итоге уравнения для скорости жидкости и для переноса тепла в ней. Однако пока не будем сильно торопиться, и займёмся не просто сохранением импульса, а даже сохранением импульса в идеальной несжимаемой жидкости — т.е. рассмотрим модель с полным отсутствием вязкости.  
  
Рассуждения практически те же самые, только теперь нас интересует не масса, а полный импульс жидкости в том же самом объёме *V*. Он равен:  
  
https://habrastorage.org/storage2/615/b82/8de/615b828de8401c49ebe4a878b1b3fd1e.png  
  
При тех же самых условиях, что и выше, импульс в объёме может меняться за счёт:

* конвективного переноса — т.е. импульс «утекает» вместе со скоростью через границу
* давления окружающих элементов жидкости
* просто за счёт внешних сил, например — от силы тяжести.

Соответствующие интегралы (порядок отвечает списку) дают такое соотношение:  
  
https://habrastorage.org/storage2/b52/2d9/59e/b522d959e8f246c70abc6993b41a331e.png  
  
Начнём их преобразовывать. Правда, для этого нужно воспользоваться тензорным анализом и правилами работы с индексами. Конкретнее, к первому и второму интегралам применяется теорема Гаусса-Остроградского в обобщённой форме (она работает не только для векторных полей). И если перейти к дифференциальной форме уравнения, то получится следующее:  
  
https://habrastorage.org/storage2/c9a/18e/51a/c9a18e51a28623069eff1f358de6749a.png  
  
Крестик в кружочке обозначает [тензорное произведение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BD%D0%B7%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5), в данном случае — векторов.  
  
В принципе, это уже уравнение Эйлера, однако его можно чуток упростить — ведь закон сохранения массы никто не отменял. Раскрыв здесь скобки в дифференциальных операторах и приведя затем подобные слагаемые, мы увидим, что три слагаемых благополучно собираются в [уравнение неразрывности](https://habr.com/ru/post/171327/#MassConservation), и потому дают в сумме ноль. Итоговое уравнение оказывается таким:  
  
https://habrastorage.org/storage2/746/e23/96f/746e2396fdb20ce1f47a8260835d3f38.png  
  
Если перейти в систему отсчёта, связанную с движущейся жидкостью (не будем заострять внимание на том, как это делается), мы увидим, что уравнение Эйлера выражает второй закон Ньютона для единицы объёма среды.

**Учёт вязкости. Уравнение Навье-Стокса**

Идеальная жидкость, это, конечно, хорошо (правда, всё равно точно не решается), но во многих случаях учёт вязкости необходим. Даже в той же конвекции, в течении жидкости по трубам. Без вязкости вода вытекала бы из наших кранов с космическими скоростями, а малейшая неоднородность температуры в воде приводила бы к её крайне быстрому и бурному перемешиванию. Потому давайте учтём сопротивление жидкости самой себе.  
  
Дополнить уравнение Эйлера можно различными (но эквивалентными, конечно же) путями. Воспользуемся базовой техникой тензорного анализа — индексной формой записи уравнения. И пока также отбросим внешние силы, чтобы не путались под руками / под ногами / перед глазами (нужное подчеркнуть). При таком раскладе всё, кроме производной по времени, можно собрать в виде дивергенции одного такого тензора:  
  
https://habrastorage.org/storage2/880/6e1/ad2/8806e1ad2eba729ca26c48b445ab7bae.png  
  
По смыслу, это плотность потока импульса в жидкости. К нему и нужно добавить вязкие силы в виде ещё одного тензорного слагаемого. Поскольку они явно приводят к потере энергии (и импульса), то они должны вычитаться:  
  
https://habrastorage.org/storage2/022/803/476/022803476d434265735dae9adeb81d08.png  
  
Идя обратно в уравнение с таким тензором, мы получим обобщённое уравнение движения вязкой жидкости:  
  
https://habrastorage.org/storage2/53a/d77/d9b/53ad77d9bf1a72df6a74f6720ea233ef.png  
  
Оно допускает любой закон для вязкости.  
  
Принято считать очевидным, что сопротивление зависит от скорости движения. Вязкость же, как перенос импульса между участками жидкости с различными скоростями, зависит от градиента скорости (но не от самой скорости — тому мешает принцип относительности). Если ограничиться разложением этой зависимости до линейных слагаемых, получится вот такой жутковатый объект:  
  
https://habrastorage.org/storage2/080/e15/e89/080e15e89f859e4205449b143dd8893f.png  
  
в котором величина перед производной содержит 81 коэффициент. Однако, используя ряд совершенно разумных предположений об однородности и изотропности жидкости, от 81 коэффициента можно перейти всего к двум, и в общем случае для сжимаемой среды, тензор вязких напряжений равен:  
  
https://habrastorage.org/storage2/8a1/963/8dd/8a19638dd07563fb9199ef719f4a0bc0.png  
  
где η (эта) — сдвиговая вязкость, а ζ (зета или дзета) — объёмная вязкость. Если же среда ещё и несжимаема, то достаточно одного коэффициента сдвиговой вязкости, т.к. второе слагаемое при этом уходит. Такой закон вязкости  
  
https://habrastorage.org/storage2/66a/66d/22d/66a66d22da0e1121853cd7d516c6a582.png  
  
носит название закона Навье, а полученное при его подстановке уравнение движения — это уравнение Навье-Стокса:  
  
https://habrastorage.org/storage2/d16/a8e/b3c/d16a8eb3c1784c05b6046004d80d7390.png

**Точные решения**

Главной проблемой гидродинамики является отсутствие точных решений её уравнений. Как бы с этим ни боролись, но получить действительно всеобщих результатов не удаётся до сих пор, и, напомню, вопрос существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса входит в список Проблем тысячелетия института Клэя.  
  
Однако, несмотря на столь грустные факты, некоторые результаты есть. Здесь будут представлены далеко не все, а лишь самые простые случаи.

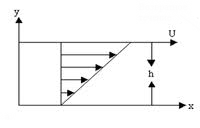
**Потенциальные течения**

Особый интерес представляют течения, в которых жидкость не завихряется. Для такой ситуации можно отказаться от рассмотрения векторного поля скорости, поскольку она выражается через градиент скалярной функции — потенциала. Потенциал же удовлетворяет хорошо изученному уравнению Лапласа, решение которого полностью определяется тем, что задано на границах рассматриваемой области:  
  
https://habrastorage.org/storage2/c18/675/c22/c18675c2257f61eb3daf031ceb28c77e.png  
  
Более того, при отсутствии вязкости из уравнения Эйлера можно однозначно выразить и давление, что вовсе замечательно и приводит нас к полному решению задачи. Ах, если бы так было всегда… то гидродинамики, наверное, уже бы и не было как современной и актуальной отрасли.  
  
Дополнительно можно упростить задачу предположением, что течение жидкости двумерно — скажем, всё движется в плоскости (x,y), и ни одна частица не перемещается вдоль оси z. Можно показать, что в таком случае скорость может быть также заменена скалярной функцией (на этот раз — функцией тока):  
  
https://habrastorage.org/storage2/6fd/165/f67/6fd165f673dd8a222baa03c166065070.png  
  
которая при потенциальном течении удовлетворяет условиям Коши-Лагранжа из теории функций комплексной переменной и воспользоваться соответствующим математическим аппаратом. Полностью совпадающим с аппаратом электростатики. Теория потенциальных течений развита на высоком уровне, и в принципе хорошо описывает большой спектр задач.

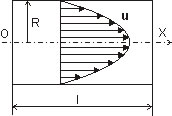
**Простые течения вязкой жидкости**

Решения для вязкой жидкости чаще всего удаётся получить, когда из уравнения Навье-Стокса благодаря свойствам симметрии задачи выпадает нелинейное слагаемое.

**Сдвиговое течение Куэтта**

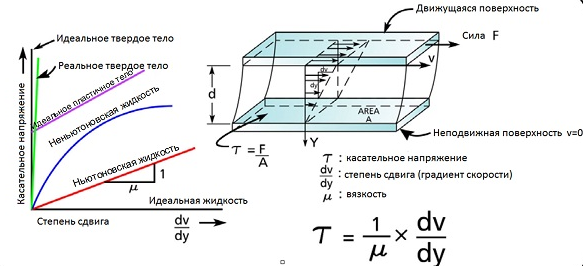
Самая элементарная задачка. Канал с неподвижной нижней и подвижной верхней стенкой, которая движется равномерно с некоторой скоростью. На границах жидкость прилипает к ним, так что скорость жидкости равна скорости границы. Этот результат является экспериментальным фактом, и как-то даже авторы первых экспериментов не упоминаются, просто — по совокупности экспериментов.  
  
В такой ситуации от уравнения Навье-Стокса останется уравнение вида v'' = 0, и потому профиль скорости в канале окажется линейным:  
  
  
  
Данная задача является практически базовой для теории смазки, т.к. позволяет непосредственно определить силу, которую требуется приложить к верхней стенке для её движения с конкретной скоростью.

**Течение Пуазейля**

Вторая по элементарности — ламинарное течение в канале. Или в трубе. Результат оказывается один — профиль скорости является параболическим:  
  
  
  
На основе решения Пуазейля можно определить расход жидкости через сечение канала, но, правда, только при ламинарном течении и гладких стенках. С другой стороны, для турбулентного потока и шероховатых стенок точных решений нет, а есть лишь приближённые эмпирические закономерности.

**Стекание слоя жидкости по наклонной плоскости**

Тут — почти как в задаче Пуазейля, только верхняя граница жидкости будет свободной. Если предположить, что по ней не бегут никакие волны, и вообще сверху нет трения, то профиль скорости будет практически нижней половинкой предыдущего рисунка. Правда, если из полученной зависимости вычислить скорость течения для средней равнинной речки, она составит около 10 км/с, и вода должна самопроизвольно отправляться в космос. Наблюдаемые в природе низкие скорости течения связаны с развитой завихренностью и турбулентностью потока, которые эффективно увеличивают вязкость воды примерно в 1 млн. раз.  
  
В следующем посте планируется рассказать о законе сохранения энергии и соответствующих ему уравнениях переноса тепла при течении жидкости.



## Система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, к которой с большой точностью можно отнести воду, имеет вид:

Здесь – [плотность](http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/dinamika/massa-plotnost/) жидкости, t – время, р – [давление](http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/gidrostatika/davlenie/), – проекции скорости (вектора) на координатные оси, – коэффициент динамической вязкости; , – пространственные координаты. – оператор набла.

Первое уравнение в системе – это собственно [уравнение движения](http://ru.solverbook.com/spravochnik/uravneniya-po-fizike/uravnenie-dvizheniya/). В левой его части стоят произведения плотности на соответствующие [ускорения](http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/kinematika/uskorenie/). В правой же части – произведения плотности на силы давления и внутреннего трения.

Второе уравнение – это уравнение неразрывности. Его физический смысл – это сохранение [массы](http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/dinamika/massa-plotnost/) для потока жидкости.

Выражение – это не что иное, как субстанциональная производная (также её называют полной). Она показывает, как изменяется ускорение [материальной точки](http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/kinematika/materialnaya-tochka/), которая движется в стационарной среде жидкости. При этом отображает изменение свойств точки в течение времени, как если бы она была неподвижной. — конвективная производная, описывающая эволюцию свойств в неподвижной точке из-за того, что через нее со скоростью протекает жидкая среда.

Система уравнений Навье-Стокса дает очень точные решения, если рассматривается ламинарное течение жидкости, либо геометрия каналов несложная. А вот при турбулентном течении уравнения очень чувствительны к значениям коэффициентов: изменение числа Рейнольдса на 0,05% может привести к кардинально другому результату.

На практике система уравнений Навье-Стокса применяется для расчёта конвекции и термической [диффузии](http://ru.solverbook.com/spravochnik/uravneniya-po-fizike/uravnenie-diffuzii/) в теплофизике и теплотехнике; для предсказания поведения смесей, состоящих из многих компонентов. Также эта система используется для описания процессов в плазме и межзвёздном газе, течений в мантии Земли. С помощью системы уравнений Навье-Стокса делают прогноз погоды, предсказывая движение масс [воздуха](http://ru.solverbook.com/spravochnik/formuly-po-ximii/formula-vozduxa/) в атмосфере.